Différents résultats d'ergodicité géométrique pour un processus de Markov déterministe par morceaux

Florian BOUGUET

IRMAR
Université de Rennes 1

28 août 2014

Modélisation

On considère un PDMP (processus de Markov déterministe par morceaux) $(X_t)_{t\geq 0}$:

- Modélise l'évolution dans le corps d'un contaminant chimique présent dans la nourriture.

Modélisation

On considère un PDMP (processus de Markov déterministe par morceaux) $(X_t)_{t\geq 0}$:

- Modélise l'évolution dans le corps d'un contaminant chimique présent dans la nourriture.
- Précédemment étudié en 2007 par Bertail, Clémençon, et Tressou.

Modélisation

On considère un PDMP (processus de Markov déterministe par morceaux) $(X_t)_{t\geq 0}$:

- Modélise l'évolution dans le corps d'un contaminant chimique présent dans la nourriture.
- Précédemment étudié en 2007 par Bertail, Clémençon, et Tressou.
- Possède 3 composantes aléatoires :
  - instants d'ingestion
  - quantités absorbées
  - taux d'élimination métabolique

Modélisation

On considère un PDMP (processus de Markov déterministe par morceaux) $(X_t)_{t\geq 0}$:

- Modélise l'évolution dans le corps d'un contaminant chimique présent dans la nourriture.
- Précédemment étudié en 2007 par Bertail, Clémençon, et Tressou.
- Possède 3 composantes aléatoires :
  - instants d'ingestion
  - quantités absorbées
  - taux d'élimination métabolique

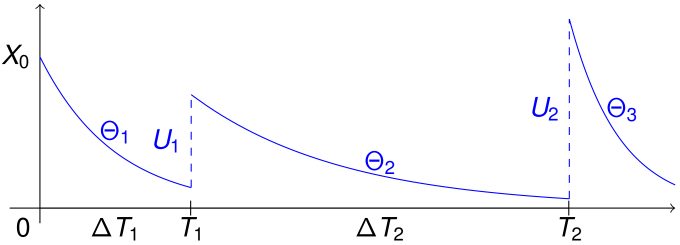
Objectif

Obtenir des résultats explicites d'ergodicité exponentielle pour (X_t).

1. Présentation du processus
2. Ergodicité géométrique et condition de Foster-Lyapunov
3. Ergodicité géométrique et méthodes de couplage

Dynamique du processus

- X_t : quantité de contaminant à l'instant t.
- T_n : instant de $n^{\text{ème}}$ ingestion.
- $\Delta T_n = T_n - T_{n-1}$ (i.i.d., à densité, de taux de saut ζ).
- U_n : quantité absorbée à la $n^{\text{ème}}$ ingestion (i.i.d., à densité).
- Θ_n : paramètre métabolique entre T_{n-1} et T_n (i.i.d.) t.q., entre T_{n-1} et T_n, X vérifie
$$\dot{X}_t = -\Theta_n X_t.$$



Comment obtenir un processus de Markov ?

Considérons le processus $(Y_t) = (X_t, \Theta_t, A_t)$, avec

- Θ_t : le paramètre métabolique à l'instant t.
- A_t : le temps depuis la dernière ingestion à l'instant t.

Le processus Y est alors un PDMP

Comment obtenir un processus de Markov ?

Considérons le processus $(Y_t) = (X_t, \Theta_t, A_t)$, avec

- Θ_t : le paramètre métabolique à l'instant t.
- A_t : le temps depuis la dernière ingestion à l'instant t.

Le processus Y est alors un PDMP, de générateur infinitésimal

$$\mathcal{L}\varphi(x,\theta,a) = -\theta x \partial_x \varphi(x,\theta,a) + \partial_a \varphi(x,\theta,a) + \zeta(a) \int_{u=0}^{\infty} \int_{\theta' \in \Theta} [\varphi(x+u,\theta',0) - \varphi(x,\theta,a)]\, F_\theta(d\theta') F_U(du).$$

Comment obtenir un processus de Markov ?

Considérons le processus $(Y_t) = (X_t, \Theta_t, A_t)$, avec

- Θ_t : le paramètre métabolique à l'instant t.
- A_t : le temps depuis la dernière ingestion à l'instant t.

Le processus Y est alors un PDMP, de générateur infinitésimal

$$\mathcal{L}\varphi(x,\theta,a) = -\theta x \partial_x \varphi(x,\theta,a) + \partial_a \varphi(x,\theta,a) \\ + \zeta(a) \int_{u=0}^{\infty} \int_{\theta' \in \Theta} \left[\varphi(x+u,\theta',0) - \varphi(x,\theta,a)\right] F_\theta(d\theta') F_U(du).$$

Décalage temporel

On autorise $A_0 \neq 0$. D'où, a priori,

$$\Delta T_1 \overset{\mathscr{L}}{\neq} \Delta T_n \qquad \text{pour } n \geq 2.$$

Rappels sur les couplages

Soient μ et $\tilde{\mu}$ des probabilités sur $\mathbb{R}^d$.
Un couplage de μ et $\tilde{\mu}$ est une probabilité sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ de marginales μ et $\tilde{\mu}$.

Rappels sur les couplages

Soient μ et $\tilde{\mu}$ des probabilités sur $\mathbb{R}^d$.
Un couplage de μ et $\tilde{\mu}$ est une probabilité sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ de marginales μ et $\tilde{\mu}$.
On appelle distance en variation totale de μ et $\tilde{\mu}$

$$\|\mu - \tilde{\mu}\|_{TV} = \inf \left\{ \mathbb{P}(X \neq \tilde{X}) / \mathscr{L}(X, \tilde{X}) \text{ couplage de } \mu, \tilde{\mu} \right\}.$$

Rappels sur les couplages

Soient μ et $\tilde{\mu}$ des probabilités sur $\mathbb{R}^d$.
Un couplage de μ et $\tilde{\mu}$ est une probabilité sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ de marginales μ et $\tilde{\mu}$.
On appelle distance en variation totale de μ et $\tilde{\mu}$

$$\|\mu - \tilde{\mu}\|_{TV} = \inf\left\{\mathbb{P}(X \neq \tilde{X}) / \mathscr{L}(X, \tilde{X}) \text{ couplage de } \mu, \tilde{\mu}\right\}.$$

Si μ et $\tilde{\mu}$ admettent des densités par rapport à la mesure de Lebesgue,

$$\begin{aligned} \|\mu - \tilde{\mu}\|_{TV} &= 1 - \int f \wedge \tilde{f} \\ &= \frac{1}{2} \int |f - \tilde{f}|. \end{aligned}$$

1 Présentation du processus

2 Ergodicité géométrique et condition de Foster-Lyapunov

3 Ergodicité géométrique et méthodes de couplage

Théorème 1 (Bertail, Clémençon, Tressou)

Si

i) La queue de distribution de $F_{\Delta T}$ est infinie.

ii)
- $f_{\Delta T}$ est strictement positive au voisinage de 0.
- La queue de distribution de F_U est infinie.

iii) $\mathbb{E}[U^p] < +\infty$ pour $p \geq 1$.

iv) $\mathbb{E}[e^{\eta \Delta T}] < +\infty$ pour $\eta > 0$.

Théorème 1 (Bertail, Clémençon, Tressou)

Si

i) La queue de distribution de $F_{\Delta T}$ est infinie.

ii)
- $f_{\Delta T}$ est strictement positive au voisinage de 0.
- La queue de distribution de F_U est infinie.

iii) $\mathbb{E}[U^p] < +\infty$ pour $p \geq 1$.

iv) $\mathbb{E}[e^{\eta \Delta T}] < +\infty$ pour $\eta > 0$.

Alors

i) Le processus $Y = (X, \Theta, A)$ est géométriquement ergodique (en variation totale).

ii) X a pour loi limite π admettant un moment d'ordre p, et $\exists v < 1, M < +\infty$ tels que

$$\sup_{\varphi(x) \leq 1 + x^p} \left\{ \left| \mathbb{E}[\varphi(X_t)] - \int \varphi d\pi \right| \right\} < Mv^t.$$

1 Présentation du processus

2 Ergodicité géométrique et condition de Foster-Lyapunov

3 Ergodicité géométrique et méthodes de couplage

Théorème 2 (B.)

Si

i) ζ est croissante (et non identiquement nulle).

ii)
- f_U est Hölder sur $\mathbb{R}_+$ et $\exists p > 2$ tel que $\lim_{x\to+\infty} x^p f(x) = 0$.
- η est Hölder sur $[0, 1]$, où $\eta(x) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |f_U(y) - f_U(y-x)|dy$.

Théorème 2 (B.)

Si

i) ζ est croissante (et non identiquement nulle).

ii)
- f_U est Hölder sur $\mathbb{R}_+$ et $\exists p > 2$ tel que $\lim_{x\to+\infty} x^p f(x) = 0$.
- η est Hölder sur $[0,1]$, où $\eta(x) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |f_U(y) - f_U(y-x)|dy$.

Alors, si Y et $\tilde{Y}$ sont deux processus générés par $\mathcal{L}$, à t fixé,

i) $\forall \alpha, \beta \in (0,1)$ tels que $\alpha < \beta$,

$$\left\|Y_t - \tilde{Y}_t\right\|_{TV} \leq 1 - \left(1 - C_1 e^{-v_1 \alpha t}\right)\left(1 - C_2 e^{-v_2(\beta-\alpha)t}\right) \left(1 - C_3 e^{-v_3(1-\beta)t}\right)\left(1 - C_4 e^{-v_4(\beta-\alpha)t}\right).$$

ii) $\forall \alpha \in (0,1)$,

$$\mathcal{W}_1(Y_t, \tilde{Y}_t) \leq C_1 e^{-v_1\alpha t} + C_2 e^{-v_2(1-\alpha)t}.$$

Théorème 2 (B.)

Si

i) ζ est croissante (et non identiquement nulle).

ii)
- f_U est Hölder sur $\mathbb{R}_+$ et $\exists p > 2$ tel que $\lim_{x\to+\infty} x^p f(x) = 0$.
- η est Hölder sur $[0,1]$, où $\eta(x) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |f_U(y) - f_U(y-x)|dy$.

Alors, si Y et $\tilde{Y}$ sont deux processus générés par $\mathcal{L}$, à t fixé,

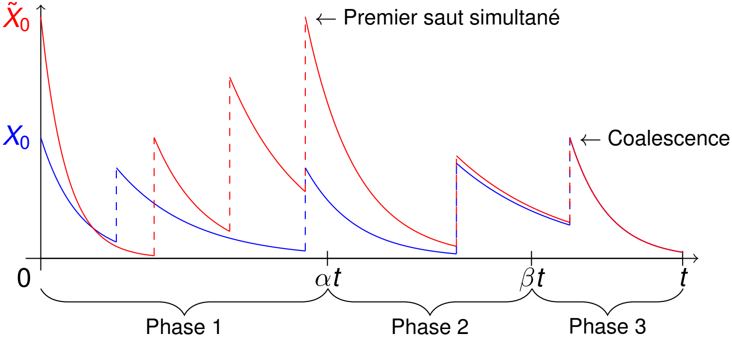
i) $\forall \alpha, \beta \in (0,1)$ tels que $\alpha < \beta$,

$$\left\| Y_t - \tilde{Y}_t \right\|_{TV} \leq 1 - \left(1 - C_1 e^{-v_1 \alpha t}\right)\left(1 - C_2 e^{-v_2(\beta-\alpha)t}\right)\left(1 - C_3 e^{-v_3(1-\beta)t}\right)\left(1 - C_4 e^{-v_4(\beta-\alpha)t}\right).$$

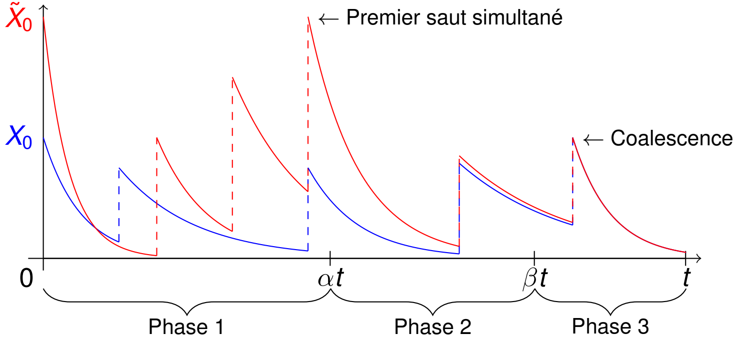
ii) $\forall \alpha \in (0,1)$,

$$\mathcal{W}_1(Y_t, \tilde{Y}_t) \leq C_1 e^{-v_1 \alpha t} + C_2 e^{-v_2(1-\alpha)t}.$$

N.B. : Les v_i sont explicites.



Comportement attendu du couplage



Comportement attendu du couplage

Ingrédient principal

Il est crucial de connaitre les moments exponentiels du temps de coalescence $\tau = \inf\left(t : \forall s,\, Y_{t+s} = \tilde{Y}_{t+s}\right)$.

$$\|Y_t - \tilde{Y}_t\|_{TV} \leq \mathbb{P}(Y_t \neq \tilde{Y}_t) \leq \mathbb{P}(\tau > t) \leq \psi_\tau(u)e^{-ut}.$$

Phase 1 : $[0, \alpha t]$

But : amener A et $\tilde{A}$ à coalescence.
Technique : rapprocher A et $\tilde{A}$ à ε près, et les faire sauter au même moment ensuite.

Phase 1 : $[0, \alpha t]$

But : amener A et $\tilde{A}$ à coalescence.
Technique : rapprocher A et $\tilde{A}$ à ε près, et les faire sauter au même moment ensuite.

Phase 2 : $[\alpha t, \beta t]$

But : rapprocher X et $\tilde{X}$.
Technique : laisser X et $\tilde{X}$ évoluer suivant un couplage intelligent, et estimer leur différence à l'aide de théorèmes classiques de renouvellement.

Phase 1 : $[0, \alpha t]$

But : amener A et $\tilde{A}$ à coalescence.
Technique : rapprocher A et $\tilde{A}$ à ε près, et les faire sauter au même moment ensuite.

Phase 2 : $[\alpha t, \beta t]$

But : rapprocher X et $\tilde{X}$.
Technique : laisser X et $\tilde{X}$ évoluer suivant un couplage intelligent, et estimer leur différence à l'aide de théorèmes classiques de renouvellement.

Phase 3 : $[\beta t, t]$

But : amener X et $\tilde{X}$ à coalescence.
Technique : faire sauter X et $\tilde{X}$ au même moment, et au même endroit en jouant sur la densité f_U.

Proposition (temps inter-arrivées exponentiels)

Si

- $F_{\Delta T} = \mathscr{E}(\lambda)$.
- f_U est à support compact et h-Hölder.

Alors, en notant $\rho = 1 - \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{-\Theta \Delta T}\right]$,

$$\left\| Y_t - \tilde{Y}_t \right\|_{TV} \leq C \exp\left(-\frac{\lambda \rho h}{1 + h + 2\rho h} t \right).$$

Proposition (temps inter-arrivées exponentiels)

Si

- $F_{\Delta T} = \mathscr{E}(\lambda)$.
- f_U est à support compact et h-Hölder.

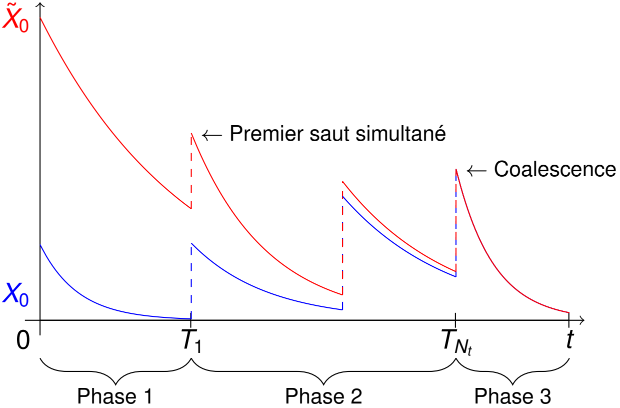
Alors, en notant $\rho = 1 - \mathbb{E}\left[e^{-\Theta \Delta T}\right]$,

$$\left\| Y_t - \tilde{Y}_t \right\|_{TV} \leq C \exp\left(-\frac{\lambda \rho h}{1 + h + 2\rho h} t \right).$$

Amélioration de la borne précédente

Sous les mêmes hypothèses, on peut raffiner le couplage et montrer que

$$\left\| Y_t - \tilde{Y}_t \right\|_{TV} \leq C \exp\left(-\frac{\lambda \rho h}{1 + h} t \right).$$



Comportement attendu du couplage raffiné

Merci pour votre attention !